第3章

逻辑函数运算规则及化简

3.1 概 述

$$F=f\ (A,\ B,\ C,\ \cdots)$$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.1 逻辑代数基本公理

公理 1： 设 A 为逻辑变量，若 $A \neq 0$，则 $A=1$；若 $A \neq 1$，则 $A=0$。

公理 2： $0 \cdot 0=0$； $1+1=1$。

公理 3： $1 \cdot 1=1$； $0+0=0$。

公理 4： $0 \cdot 1=0$； $1+0=1$。$1 \cdot 0=0$； $0+1=1$

公理 5： $\overline{0}=1$； $\overline{1}=0$。

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.2 逻辑代数的基本定律

（1） **0-1 律：** $A \cdot 0 = 0$； $A + 1 = 1$。

（2）**自等律：** $A \cdot 1 = A$； $A + 0 = A$。

（3）**重叠律：** $A \cdot A = A$； $A + A = A$

（4）**互补律：** $A \cdot \overline{A} = 0$； $A + \overline{A} = 1$。

（5）**还原律：** $\overline{\overline{A}} = A$。

（6）**交换律：** $A \cdot B = B \cdot A$； $A + B = B + A$。

（7）**结合律：** $A \cdot (B \cdot C) = (A \cdot B) \cdot C$； $A + (B + C) = (A + B) + C$。

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.2 逻辑代数的基本定律

（8）**分配律：** $A\cdot(B+C)=AB+AC$ ； $A+(B\cdot C)=(A+B)\cdot(A+C)$

加（逻辑或）对乘（逻辑与）的分配律证明如下：

$$
\begin{aligned}
A+(B\cdot C) &= A(1+B+C)+BC && \text{(利用0−1律和自等律)}\\
&= A+AB+AC+BC && \text{(利用乘对加的分配律)}\\
&= AA+AB+AC+BC && \text{(利用重叠律)}\\
&= A(A+B)+C(A+B) && \text{(利用乘对加的分配律)}\\
&= (A+B)(A+C) && \text{(利用乘对加的分配律)}
\end{aligned}
$$

（9）**吸收律：** $A+A\bullet B=A$ ； $A\cdot(A+B)=A$

证明： $A+A\bullet B=A(1+B)=A\cdot 1=A$

$A\cdot(A+B)=AA+AB=A+AB=A(1+B)=A$

(10) **等同律：** $A+\overline{A}B=A+B$; $A\cdot(\overline{A}+B)=AB$

证明： $A+\overline{A}B=A(1+B)+\overline{A}B=A+AB+\overline{A}B=A+B(A+\overline{A})=A+B$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.2 逻辑代数的基本定律

（11）**反演律**（摩根定理）：$\overline{A \cdot B} = \overline{A} + \overline{B}$；$\overline{A + B} = \overline{A} \cdot \overline{B}$

以下真值表表 3-1 的证明可见反演律成立。

表 3-1 真值表

A	B	$\overline{A \bullet B}$	$\overline{A} + \overline{B}$	$\overline{A + B}$	$\overline{A} \cdot \overline{B}$
0	0	1	1	1	1
0	1	1	1	0	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0

（12）**包含律**：$AB + \overline{A}C + BCD = AB + \overline{A}C$

证明：$AB + \overline{A}C + BCD = AB + \overline{A}C + BCD(A + \overline{A})$

$$= AB + \overline{A}C + ABCD + \overline{A}BCD$$

$$= (AB + ABCD) + (\overline{A}C + \overline{A}BCD)$$

$$= AB(1 + CD) + \overline{A}C(1 + BD) \ = AB + \overline{A}C$$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.3 摩根定理

$$\overline{AB} = \overline{A} + \overline{B} \qquad \overline{A+B} = \overline{A}\,\overline{B}$$

$$\overline{ABC} = \overline{A} + \overline{B} + \overline{C}\ ; \quad \overline{A+B+C} = \overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}$$

【例 3-1】 应用摩根定理化简逻辑函数 $F = \overline{(AB+\overline{C})(A+\overline{B}C)}$

解：反复应用摩根定理可得：

$$F = \overline{AB+\overline{C}} + \overline{A+\overline{B}C} = \overline{AB}C + \overline{A}\,\overline{\overline{B}C}$$

$$= (\overline{A}+\overline{B})C + \overline{A}(B+\overline{C}) = \overline{A}C + \overline{B}C + \overline{A}B + \overline{A}\,\overline{C} = \overline{A} + \overline{B}C$$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.4 逻辑代数的基本规则

1．代入规则

$$A(B+C)=AB+AC \qquad A(B+(C+D))=AB+A(C+D)$$

2．反演规则

【例 3-2】 已知逻辑函数 $F=\bar{A}+\bar{B}(C+\bar{D}E)$，试求其反函数。

解： $\bar{F}=A(B+\bar{C}(D+\bar{E}))$ ，而不应该是 $\bar{F}=AB+\bar{C}D+\bar{E}$

【例 3-3】 已知 $F=A+\overline{B+\bar{C}\cdot\overline{D+\bar{E}}}$，求 $\bar{F}$ 。

解法一：

$$F=A+\overline{B+\bar{C}\cdot\overline{D+\bar{E}}}=A+\overline{B+\bar{C}\bar{D}E}$$

$$\bar{F}=\bar{A}(B+\bar{C}\bar{D}E)=\bar{A}B+\bar{A}\bar{C}\bar{D}E$$

解法二：

$$\bar{F}=\overline{A+\overline{B+\bar{C}\cdot\overline{D+\bar{E}}}}=\bar{A}\cdot\overline{\bar{B}(C+D+\bar{E})}=\bar{A}(B+\overline{C+D+\bar{E}})$$

$$=\bar{A}(B+\bar{C}\bar{D}E)=\bar{A}B+\bar{A}\bar{C}\bar{D}E$$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.4 逻辑代数的基本规则

3．对偶规则

【例 3-4】 已知 $F = AB + \bar{C}D$，求F^*。

解： $F^* = (A + B)(\bar{C} + D)$

【例 3-5】 已知 $F = A + \overline{B + \bar{C} \bullet \overline{D + \bar{\bar{E}}}}$，求 F^*。

解： $F = A + \overline{B + \bar{C} \bullet \overline{D + \bar{\bar{E}}}} = A + \overline{B + \bar{C}\bar{D}E}$

$F^* = A \bullet \overline{B(\bar{C} + \bar{D} + E)} = A\bar{B} + ACD\bar{E}$

3.2 逻辑代数的运算规则

3.2.4 逻辑代数的基本规则

3．对偶规则

性质 1： 若 $F(A, B, C, \cdots)=G(A, B, C, \cdots)$，则 $F^*=G^*$

性质 2： $(F^*)^*=F$

【例 3-6】 证明函数 $F=(A+\overline{C})\overline{B}+A(\overline{B}+\overline{C})$ 是一自对偶函数。

证明：$F^*=(A\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B}\overline{C})=(A+\overline{B})(\overline{C}+\overline{B})(A+\overline{B})(A+\overline{C})$

$=(A+\overline{B})(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C}) = A(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})+\overline{B}(\overline{B}+\overline{C})(A+\overline{C})$

$=(\overline{B}+\overline{C})(A+A\overline{C})+(\overline{B}+\overline{B}\overline{C})(A+\overline{C})$

$=A(\overline{B}+\overline{C})+\overline{B}(A+\overline{C}) \quad =F$

3.3 逻辑函数表述方法

3.3.1 逻辑代数表达式

$$F(A,B,C,D)=A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}BC+A\bar{B}\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}D$$

3.3.2 逻辑图表述

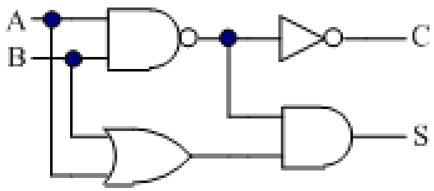

图 3-1　例 3-7 的逻辑图

【例 3-7】 分析图 3-1 逻辑图的逻辑功能。

解：由图可知：

$$S(A,B)=(A+B)\overline{AB},\qquad C(A,B)=\overline{\overline{AB}}=AB$$

3.3 逻辑函数表述方法

3.3.3 真值表表述

【例 3-8】列出函数 $Y=AB+BC+CA$ 的真值表。

解：$Y=AB+BC+CA$ 的真值表如表 3-2 所示。

表 3-2 例 3-8 的真值表

A	B	C	Y
0	0	0	0
0	0	1	0
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

3.3 逻辑函数表述方法

3.3.4 卡诺图表述方式

$AB \backslash C$	0	1
00	m_0	m_1
01	m_2	m_3
11	m_6	m_7
10	m_4	m_5

(a) 3 变量卡诺图

$AB \backslash CD$	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

(b) 4 变量卡诺图

$AB \backslash CDE$	000	001	011	010	110	111	101	100
00	m_0	m_1	m_3	m_2	m_6	m_7	m_5	m_4
01	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}	m_{14}	m_{15}	m_{13}	m_{12}
11	m_{24}	m_{25}	m_{27}	m_{26}	m_{30}	m_{31}	m_{29}	m_{28}
10	m_{16}	m_{17}	m_{19}	m_{18}	m_{22}	m_{23}	m_{21}	m_{20}

(c) 5 变量卡诺图

图 3-2　3、4、5 变量的卡诺图

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.1 最小项表述方式

1．最小项的定义

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}、\bar{A}\bar{B}\bar{C}D、\bar{A}\bar{B}C\bar{D}、\cdots、ABCD$$

$$\bar{A}\bar{B}\bar{C}\bar{D}=m_0，\bar{A}\bar{B}\bar{C}D=m_1，\bar{A}\bar{B}C\bar{D}=m_2,\cdots，ABCD=m_{15}$$

2．最小项的性质

$$\sum m_i=1$$

$$A\bar{B}CD \text{与} ABCD$$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.2 最大项表述方式

1. 最大项的定义

$$A+B+C+D,\quad A+B+C+\bar{D},\quad A+B+\bar{C}+D,\quad \cdots,\quad \bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}$$

$$A+B+C+D=M_0$$

$$A+B+C+\bar{D}=M_1$$

$$A+B+\bar{C}+D=M_2$$

$$\cdots\cdots$$

$$\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}+\bar{D}=M_{15}$$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.2 最大项表述方式

2. 最大项的性质

$$M_4+M_6=(A+\bar{B}+C+D)+(A+\bar{B}+\bar{C}+D)=A+\bar{B}+1+D=1$$

$A+B+C+D$ 与 $A+B+C+\bar{D}$ 是相邻最大项

3. 最小项与最大项的关系

$$m_i=\overline{M_i}$$

$\overline{ABC}=\bar{A}+\bar{B}+\bar{C}$，即为：$\bar{m}_7=M_7$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.3 标准与或表达式

【例 3-9】将 $F=ABC+\bar{A}B\bar{D}$ 展开为最小项之和的形式。

解：$F=ABC+\bar{A}B\bar{D} \quad =ABC(D+\bar{D})+\bar{A}B\bar{D}(C+\bar{C})$

$$=ABCD+ABC\bar{D}+\bar{A}BC\bar{D}+\bar{A}B\bar{C}\bar{D}$$

$$=m_{15}+m_{14}+m_6+m_4=\sum m(4,6,14,15)$$

【例 3-10】将 $F=AB+\bar{A}BC$ 写成标准与或表达式。

解：$F=AB+\bar{A}BC=AB(C+\bar{C})+\bar{A}BC$

$$=ABC+AB\bar{C}+\bar{A}BC=\sum m(3,6,7)$$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.4 标准或与表达式

$$A \cdot \overline{A} = 0 \qquad A + BC = (A+B)(A+C)$$

【例 3-11】将 $F = \overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C} = \sum m(0,2,3,6)$ 展开为最大项之积的形式。

解：$F = \overline{\overline{\overline{A}B\overline{C} + AB\overline{C} + \overline{A}BC + \overline{A}\overline{B}\overline{C}}} = \overline{\sum m(1,4,5,7)}$

$$= \overline{\overline{A}\overline{B}C + A\overline{B}\overline{C} + A\overline{B}C + ABC} = \overline{\overline{A}\overline{B}C} \bullet \overline{A\overline{B}\overline{C}} \bullet \overline{A\overline{B}C} \bullet \overline{ABC}$$

$$= (A+B+\overline{C})(\overline{A}+B+C)(\overline{A}+B+\overline{C})(\overline{A}+\overline{B}+\overline{C}) = \prod M(1,4,5,7)$$

【例 3-12】 将 $F = (A+\overline{B})(A+B+C)$ 写成标准或与表达式。

解：$F = (A+\overline{B})(A+B+C) = (A+\overline{B}+C\overline{C})(A+B+C)$

$$= (A+\overline{B}+C)(A+\overline{B}+\overline{C})(A+B+C) = \prod M(0,2,3)$$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.5 两种标准形式的相互转换

$$2^n - K$$

【例 3-13】将标准与或表达式 $F(A,B,C)=\sum m(0,3,5,6)$ 表示为标准或与表达式。

解：$F(A,B,C)=\sum m(0,3,5,6)=\prod M(1,2,4,7)$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.6 逻辑函数表达式与真值表的相互转换

1. 由真值表求对应的逻辑函数表达式

表 3-3 真值表

A	B	C	F	最小项	最大项
0	0	0	0	m_0	M_0
0	0	1	1	m_1	M_1
0	1	0	1	m_2	M_2
0	1	1	1	m_3	M_3
1	0	0	0	m_4	M_4
1	0	1	1	m_5	M_5
1	1	0	0	m_6	M_6
1	1	1	0	m_7	M_7

$$F = m_1 + m_2 + m_3 + m_5 = \sum m(1,2,3,5)$$
$$= \bar{A}\bar{B}C + \bar{A}B\bar{C} + \bar{A}BC + A\bar{B}C = M_0 \cdot M_4 \cdot M_6 \cdot M_7 = \prod M(0,4,6,7)$$
$$= (A+B+C)(\bar{A}+B+C)(\bar{A}+\bar{B}+C)(\bar{A}+\bar{B}+\bar{C})$$

3.4 逻辑函数的标准形式

3.4.6 逻辑函数表达式与真值表的相互转换

2. 由逻辑函数表达式求对应的真值表

$$逻辑函数 F = AB + \overline{A}BC = ABC + AB\overline{C} + \overline{A}BC$$

ABC：111；　$AB\overline{C}$：110；　$\overline{A}BC$:011

3.5 逻辑代数化简方法

3.5.1 并项化简法

$$A+\overline{A}=1$$

【例 3-14】 化简 $F=A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C$

解：$F=A\overline{B}\overline{C}+A\overline{B}C=A\overline{B}(C+\overline{C})=A\overline{B}$

【例 3-15】 化简 $F=ABC+\overline{A}BC+B\overline{C}$

解：$F=ABC+\overline{A}BC+B\overline{C}=(A+\overline{A})BC+B\overline{C}=BC+B\overline{C}\quad=B$

【例 3-16】 化简 $F=A(BC+\overline{B}\overline{C})+A(B\overline{C}+\overline{B}C)$

解：$F=A(BC+\overline{B}\overline{C})+A(B\overline{C}+\overline{B}C)=A(B\odot C)+A(B\oplus C)$

$=A(B\odot C)+A(\overline{B\odot C})=A$

3.5 逻辑代数化简方法

3.5.2 吸收化简法

$$A+AB=A \qquad\qquad A+\overline{A}B=A+B$$

【例 3-17】化简 $F=\overline{A}B+\overline{A}BCD(\overline{E}+F)$

解：$F=\overline{A}B+\overline{A}BCD(\overline{E}+F)=\overline{A}B$

【例 3-18】化简 $F=A\overline{B}+C+\overline{A}\,\overline{C}D+B\overline{C}D$

解：$F=A\overline{B}+C+\overline{A}\,\overline{C}D+B\overline{C}D=A\overline{B}+C+\overline{C}(\overline{A}+B)D$

$$=A\overline{B}+C+(\overline{A}+B)D=A\overline{B}+C+\overline{A\overline{B}}D$$

$$=A\overline{B}+C+D$$

【例 3-19】化简 $F=A+\overline{\overline{A}\,\overline{BC}}(\overline{A}+\overline{\overline{B}\,\overline{C}+D})+BC$

解：$F=A+\overline{\overline{A}\,\overline{BC}}(\overline{A}+\overline{\overline{B}\,\overline{C}+D})+BC=A+BC+(A+BC)(\overline{A}+\overline{\overline{B}\,\overline{C}+D})=A+BC$

3.5 逻辑代数化简方法

3.5.3 配项化简法

$$A+\bar{A}=1 \qquad A+A=A$$

【例 3-20】 化简 $F=AB+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}$

解：$F=AB+\bar{A}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}=AB+\bar{A}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}+\bar{A}\bar{B}\bar{C}$

$=AB+\bar{A}\bar{C}+A\bar{B}\bar{C}=AB+\bar{C}(\bar{A}+A\bar{B})$

$=AB+\bar{C}(\bar{A}+\bar{B})=AB+\bar{C}\,\overline{AB}=AB+\bar{C}$

【例 3-21】化简 $F=\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+BC+AB$

解：$F=\bar{A}\bar{B}+\bar{B}\bar{C}+BC+AB=\bar{A}\bar{B}(C+\bar{C})+\bar{B}\bar{C}+BC(A+\bar{A})+AB$

$=\bar{A}\bar{B}C+\bar{A}\bar{B}\bar{C}+\bar{B}\bar{C}+ABC+\bar{A}BC+AB$

$=AB+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}C(B+\bar{B})=AB+\bar{B}\bar{C}+\bar{A}C$

【例 3-22】化简 $F=ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

解：$F=ABC+AB\bar{C}+A\bar{B}C+\bar{A}BC$

$=(ABC+AB\bar{C})+(ABC+A\bar{B}C)+(ABC+\bar{A}BC)$

$=AB+AC+BC$

3.5 逻辑代数化简方法

3.5.4 消去冗余项化简法

$$AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$$

【例 3-23】化简 $F=AC+A\bar{B}CD+ABC+\bar{C}D+ABD$

解：$F=AC+A\bar{B}CD+ABC+\bar{C}D+ABD$

$$=AC(1+\bar{B}D+B)+\bar{C}D+ABD=AC+\bar{C}D+ABD=AC+\bar{C}D$$

【例 3-24】化简 $F=AB+\bar{B}C+AC(DE+FG)$

解：$F=AB+\bar{B}C+AC(DE+FG)=AB+\bar{B}C$

【例 3-25】 化简 $F=AD+A\bar{D}+AB+\bar{A}C+BD+\bar{B}E+DE$

解：$F=AD+A\bar{D}+AB+\bar{A}C+BD+\bar{B}E+DE)$

$$=A+AB+\bar{A}C+BD+\bar{B}E+DE$$

$$=A+\bar{A}C+BD+\bar{B}E+DE$$

$$=A+C+BD+\bar{B}E+DE$$

$$=A+C+BD+\bar{B}E$$

3.5 逻辑代数化简方法

3.5.4 消去冗余项化简法

$$AB+\bar{A}C+BC=AB+\bar{A}C$$

【例 3-26】化简 $F=AB+A\bar{C}+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)$

解：

$$\begin{aligned}
F &= AB+A\bar{C}+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)\\
&= A(B+\bar{C})+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)\\
&= A(\overline{\bar{B}C})+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)\\
&= A+\bar{B}C+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B+ADE(F+G)\\
&= A+\bar{B}C(D+\bar{D})+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}B(C+\bar{C})\\
&= A+\bar{B}CD+\bar{B}C\bar{D}+\bar{C}B+\bar{B}D+\bar{D}BC+\bar{D}B\bar{C}\\
&= A+\bar{B}D+C\bar{D}+B\bar{C}
\end{aligned}$$

【例 3-27】化简 $F=(\bar{B}+D)(\bar{B}+D+A+G)(C+E)(\bar{C}+G)(A+E+G)$

解：(1) 先求出 F 的对偶函数 F^*，并对其进行化简：

$$F^*=\bar{B}D+\bar{B}DAG+CE+\bar{C}G+AEG=\bar{B}D+CE+\bar{C}G$$

(2) 求 F^* 的对偶函数，便得 F 的最简或与表达式：

$$F=(\bar{B}+D)(C+E)(\bar{C}+G)$$

3.6 卡诺图化简法

3.6.1 与或表达式的卡诺图表示

【例 3-28】用卡诺图表示下面的标准与或表达式：

$$F=\bar{A}BC+ABC+A\bar{B}C$$

$AB \backslash C$	0	1	
00	0	0	
01	0	1	$\leftarrow \bar{A}BC$
11	0	1	$\leftarrow ABC$
10	0	1	$\leftarrow A\bar{B}C$

图 3-3 标准与或卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.1 与或表达式的卡诺图表示

【例 3-29】 用卡诺图表示逻辑函数：

$$F=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\overline{D}+ACD+A\overline{B}$$

解：首先将逻辑函数 F 化为若干个最小项之和的标准形式：

$$\begin{aligned}F&=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B\overline{D}+ACD+A\overline{B}\\&=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}B(C+\overline{C})\overline{D}+A(B+\overline{B})CD+A\overline{B}(C+\overline{C})(D+\overline{D})\\&=\overline{A}\,\overline{B}\,\overline{C}D+\overline{A}BC\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}D+ABCD+A\overline{B}CD+A\overline{B}C\overline{D}+A\overline{B}\,\overline{C}D+A\overline{B}\,\overline{C}\,\overline{D}\\&=\sum m(1,5,6,8,9,10,11,15)\end{aligned}$$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	0	0
01	0	1	0	1
11	0	0	1	0
10	1	1	1	1

图 3-4 非标准与或表达式卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.1 与或表达式的卡诺图表示

【例 3-30】用卡诺图表示逻辑函数：$F=\bar{A}\bar{D}+\bar{B}C$

解：在变量 A、D 取值均为 00 的所有方格中填入 1；在变量 B、C 取值分别为 0、1 的所有方格中填入 1，其余方格中填入 0，卡诺图如图 3-5 所示。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	1	0	0	1
11	0	0	0	0
10	0	0	1	1

图 3-5 非标准与或表达式卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.2 与或表达式的卡诺图化简

1. 卡诺图化简原理

AB \ CD	00	01	11	10
00	m_0	m_1	m_3	m_2
01	m_4	m_5	m_7	m_6
11	m_{12}	m_{13}	m_{15}	m_{14}
10	m_8	m_9	m_{11}	m_{10}

图 3-6 逻辑相邻最小项的概念

$$AB + A\overline{B} = A$$

3.6 卡诺图化简法

3.6.2 与或表达式的卡诺图化简

2. 卡诺图化简的步骤

【例 3-31】用卡诺图化简法求出以下逻辑函数的最简与或式：

$$F(A,B,C,D)=\sum m(1,3,5,7,8,9,10,11,14,15)$$

解：首先画出该逻辑函数的卡诺图（图 3-7），然后按照以上步骤进行化简。

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	1	1	0
01	0	1	1	0
11	0	0	1	1
10	1	1	1	1

$\overline{A}D$

AC

$A\overline{B}$

图 3-7 例 3-31 的卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.2 与或表达式的卡诺图化简

2. 卡诺图化简的步骤

【例 3-32】某逻辑电路的输入变量为 A、B、C、D，它的真值表如表 3-4 所示，用卡诺图化简法求出逻辑函数 F(A, B, C, D)的最简与或表达式。

表 3-4 例 3-32 的真值表

A	*B*	*C*	*D*	*F*	*A*	*B*	*C*	*D*	*F*
0	0	0	0	1	1	0	0	0	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0
0	0	1	0	0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	0	1	1	0
0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	1	0	1	1	1	1	0	1	0
0	1	1	0	0	1	1	1	0	0
0	1	1	1	0	1	1	1	1	1

3.6 卡诺图化简法

3.6.2 与或表达式的卡诺图化简

2. 卡诺图化简的步骤

解：由以上真值表画出卡诺图，如图 3-8 所示。找出可以合并的最小项，即画“圈”，并写出最简与或表达式：

$$F=\overline{C}\overline{D}+A\overline{B}\overline{D}+\overline{A}B\overline{C}+ABCD$$

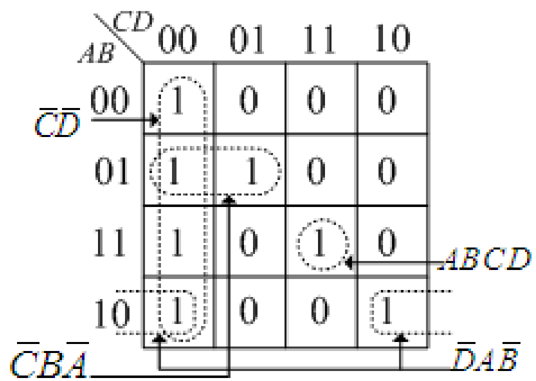

图 3-8 例 3-32 的卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.2 与或表达式的卡诺图化简

2. 卡诺图化简的步骤

【例 3-33】用卡诺图化简法求出以下逻辑函数的最简与或式：

$F(A,B,C,D)=\sum m(0,2,3,4,6,8,10,11,12,14)$。

解：画出该逻辑函数的卡诺图（图 3-9）。最简与或式为：

$$F(A,B,C,D)=\bar{B}C+\bar{D}$$

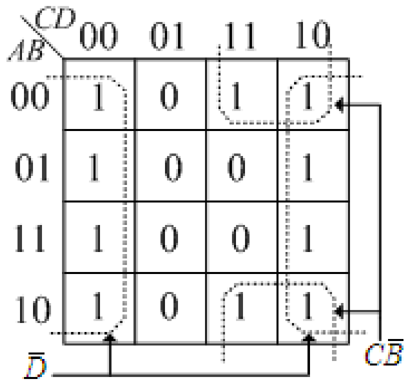

图 3-9 例 3-33 的卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.3 或与表达式的卡诺图化简

1. 或与表达式的卡诺图表示

【例 3-34】用卡诺图表示下面的标准或与表达式：

$$F=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

解：根据上式画出卡诺图，如图 3-10 所示。

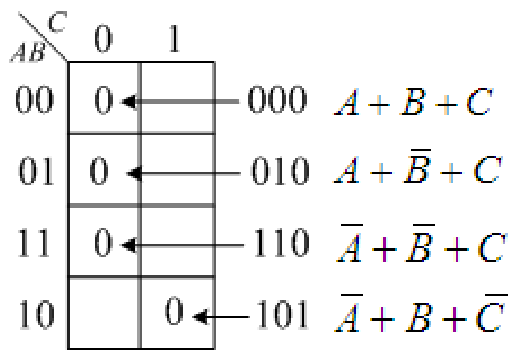

图 3-10 标准或与表达式的卡诺图

3.6 卡诺图化简法

3.6.3 或与表达式的卡诺图化简

2. 或与表达式的卡诺图化简

【例 3-35】用卡诺图化简下面或与表达式：

$$F=(A+B+C)(A+\overline{B}+C)(\overline{A}+\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

解：根据上式画出卡诺图，如图 3-11 所示。

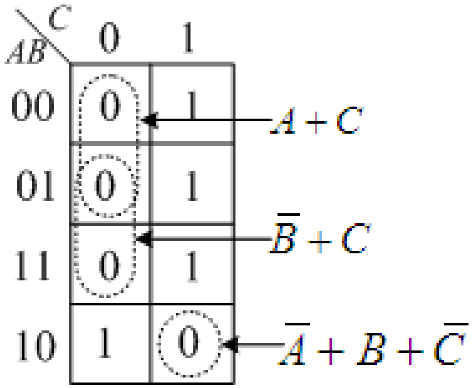

图 3-11 例 3-34 的卡诺图

$$F=(A+C)(\overline{B}+C)(\overline{A}+B+\overline{C})$$

3.6 卡诺图化简法

3.6.4 含无关项逻辑函数的化简

最小项表达式：$F=\sum m()+d(\ )$ 或者 $\begin{cases} F=\sum m(\ ) \\ \sum d(\ )=0 \end{cases}$

【例 3-36】化简下列函数：

$$F(A,B,C,D)=\sum m(0,3,4,7,11)+d(8,9,12,13,14,15)$$

解：上式中对应于最小项 m_0、m_3、m_4、m_7、m_{11} 的方格中填入 1，而对应于无关项 m_8、m_9、m_{12}、m_{13}、m_{14}、m_{15} 的方格中填入×，表示其取值不确定。卡诺图如图 3-12 所示。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	0
01	1	0	1	0
11	X	X	X	X
10	X	X	1	0

$\overline{C}\overline{D}$ CD

图 3-12 例 3-36 的卡诺图

$$F=\overline{C}\overline{D}+CD$$

3.6 卡诺图化简法

3.6.4 含无关项逻辑函数的化简

【例 3-37】化简函数：$F=\overline{B}C\overline{D}+\overline{A}\overline{B}CD+A\overline{B}\overline{D}+\overline{B}\overline{C}\overline{D}$

已知约束条件为：$AD+BC=0$

解：将上述约束条件变换为最小项之和的形式：

$$\begin{aligned}AD+BC&=A(B+\overline{B})(C+\overline{C})D+(A+\overline{A})BC(D+\overline{D})\\&=ABCD+AB\overline{C}D+A\overline{B}CD+A\overline{B}\overline{C}D\\&+\overline{A}BCD+ABC\overline{D}+\overline{A}BC\overline{D}=0\end{aligned}$$

以上等式的 0 左边的最小项都是无关项，即 $d(6,7,9,11,13,14,15)=0$，由此可得到逻辑函数 F 的卡诺图如图 3-13 所示。

AB \ CD	00	01	11	10
00	1	0	1	1
01	0	0	X	X
11	0	X	X	X
10	1	X	X	1

图 3-13 例 3-37 的卡诺图

$$F=C+\overline{B}\overline{D}$$

3.6 卡诺图化简法

3.6.5 多输出逻辑函数的化简

【例 3-38】 化简以下多输出函数：

$$F_1=\sum m(2,3,6,7,10,11,12,13,14,15) \quad , \quad F_2=\sum m(2,6,10,12,13,14)$$

解：分别作出它们的卡诺图，如图 3-14 所示。观察两个卡诺图，找出两者相同的部分，并化简为：$F_1=C+AB\overline{C}$ ； $F_2=C\overline{D}+AB\overline{C}$

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	1	1
01	0	0	1	1
11	1	1	1	1
10	0	0	1	1

(a) F_1的卡诺图

AB \ CD	00	01	11	10
00	0	0	0	1
01	0	0	0	1
11	1	1	0	1
10	0	0	0	1

(b) F_2的卡诺图

图 3-14 例 3-38 的卡诺图